Interpretación del multiplicador y Teorema de la Envolvente

Aplicaciones matemáticas para economía y negocios (EAF2010)

Felipe Del Canto

Pontificia Universidad Católica de Chile

Primer semestre de 2021

Interpretación de los multiplicadores

Interpretación económica de los multiplicadores

- En este formato también mantenemos la interpretación de los multiplicadores.
- La diferencia es que ahora el precio sombra no puede ser negativo.
  - Porque las condiciones de KKT obligan a que en el óptimo $\lambda_j^* \geq 0$.
- Entonces la interpretación depende si la restricción está activa o no.

Teorema (Interpretación económica de los multiplicadores)

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones y sean $c_1, \ldots, c_m$ números reales. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_j(\mathbf{x}) \leq c_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

con solución $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ que dependen de $c_1, \ldots, c_m$ (es decir, son funciones de m variables). Si $\mathbf{x}^*$ y λ_j^* son funciones con derivada continua para cada j y además se cumple la condición de calificación de restricciones en la solución óptima. Entonces

$$\lambda_j^*(c_1, \ldots, c_m) = \frac{\partial}{\partial c_j} f(\mathbf{x}^*(c_1, \ldots, c_m))$$

- Notar que en KKT solo hay dos opciones para el precio sombra.

- Si $\lambda_j^* > 0$, entonces $g_j(\mathbf{x}^*) = c_j$ y la interpretación es como antes.
  - λ_j^* representa el aumento en f^* cuando dejamos que c_j crezca.
  - En otras palabras, es beneficioso que la restricción se relaje un poco.

- Si $\lambda_j^* = 0$ podemos pensar que $g_j(\mathbf{x}^*) < c_j$.
  - En este caso, aumentar c_j no tiene valor, porque ya estoy "holgado".
  - Luego, f^* no va a aumentar si dejo que c_j crezca, que se evidencia por $\lambda_j^* = 0$.

Ejemplo (Interpretación económica de los multiplicadores)

Recordemos el ejemplo de la bandera. La persona debía poner la bandera en el punto más alejado de una cancha elíptica. El problema que se resolvía era

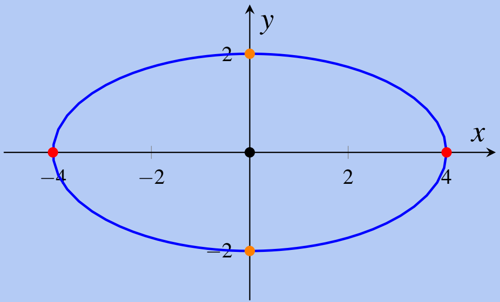
$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & x^2 + y^2 \\ \text{s.a.} \quad & x^2 + 4y^2 \leq 16 \end{aligned}$$

y las soluciones óptimas eran $(-4,0,1)$ y $(4,0,1)$. Eso significa que si relajáramos la restricción en 1 (es decir, si hiciéramos la elipse más grande), entonces el óptimo crece aproximadamente en 1 ($\lambda^* = 1$).

De hecho, si la restricción fuera $x^2 + 4y^2 \leq 17$, los óptimos serían $(-\sqrt{17},0,1)$ y $(\sqrt{17},0,1)$ y la diferencia es exactamente 1 ($4^2 + 0^2$ vs $\sqrt{17}^2 + 0^2$).

Ejemplo (Interpretación económica de los multiplicadores)

El signo del precio sombra es claro mirando el dibujo



Si la elipse se agranda, los puntos rojos (que eran los máximos) quedan más lejos del origen, luego tener la restricción en 16 es costoso y $\lambda^* > 0$. ¿Qué pasa ahora si miramos el problema inverso?

Ejemplo (Interpretación económica de los multiplicadores)

Pensemos en el problema de minimizar la distancia al origen sujeto a estar en la elipse, es decir, resolvemos

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x,y} & x^2+y^2 \\ \text{s.a.} & x^2+4y^2 \leq 16 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \max\limits_{x,y} & -x^2-y^2 \\ \text{s.a.} & x^2+4y^2 \leq 16 \end{array}$$

Si se resuelve el problema usando KKT el único punto que aparece como óptimo es $(x^*,y^*,\lambda^*)=(0,0,0)$. Eso significa que si relajáramos la restricción en 1 (es decir, si hacemos la elipse más grande), entonces el óptimo no cambia ($\lambda^*=0$).

En el dibujo también se ve de manera clara. El punto óptimo en este caso es el **negro**, que no se modifica si agrandamos la elipse.

Ejercicio (Interpretación económica de los multiplicadores)

Verifique que la interpretación del multiplicador para el problema de la firma sujeta a un presupuesto de **a lo más** 500 se mantiene desde el capítulo anterior. En general, compruebe que esto pasa si su presupuesto $B \geq 100$. Revise también el caso $0 < B < 100$.

Ejercicio (Interpretación económica de los multiplicadores)

Verifique que la interpretación del multiplicador para el problema de la firma sujeta a una producción de **al menos** Q, cuando $Q \geq 10$ se mantiene desde el capítulo anterior. Revise también el caso $0 < Q < 10$.

Ejercicio (Interpretación económica de los multiplicadores)

Haga el mismo análisis del ejemplo para el ejercicio de la montaña.

Ejercicio (Interpretación económica de los multiplicadores)

Haga el mismo análisis del ejemplo para el ejemplo de maximización de utilidad de ver series y jugar videojuegos. (*Recuerde que hay dos restricciones en este caso.*)

Ejercicio (Interpretación económica de los multiplicadores)

Haga el mismo análisis del ejemplo para el ejercicio de maximización de la silla de montar. (*Recuerde que hay dos restricciones en este caso.*)

Teorema de la envolvente

- El teorema de la envolvente también aplica en este caso.
- Y la lógica será la misma que en el capítulo anterior.
- Lo que cambia es que las restricciones inactivas no aportan.
  - Porque al derivar el lagrangiano y reemplazar los λ_j^* esa restricción desaparece.

Teorema (Teorema de la envolvente)

Sean $f, h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones que dependen de un vector de parámetros $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$. Sean $\mathbf{x}^*(\mathbf{a})$, $\lambda_j^*(\mathbf{a})$ (con $j = 1, \ldots, m$) la solución óptima del problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \\ \text{s.a.} \quad & h_j(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \leq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

que tiene lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m; \mathbf{a})$ y función de valor $f^*(\mathbf{a})$. Supongamos que $\mathbf{x}^*$ y λ_j^* son funciones con derivadas parciales continuas con respecto a a_i para todo j y que se satisface la condición de calificación de restricciones en la solución óptima. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial a_i} f^*(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial a_i} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*(\mathbf{a}), \lambda_1^*(\mathbf{a}), \ldots, \lambda_m^*(\mathbf{a}); \mathbf{a})$$

Ejemplo (Teorema de la envolvente)

Pensemos nuevamente el ejemplo de la bandera pero permitiendo que la cancha modifique su tamaño en el eje y:

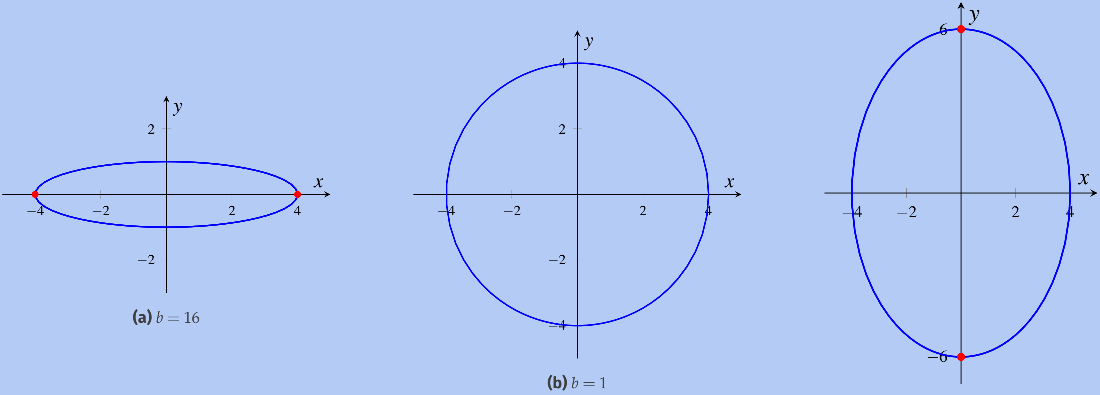
$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & x^2 + y^2 \\ \text{s.a.} \quad & x^2 + by^2 \leq 16 \end{aligned}$$

donde $b \in (0, \infty)$. Tenemos lagrangeano

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda[x^2 + by^2 - 16]$$

Pero este caso es particular porque la solución cambia de lugar cuando b cambia, lo que es claro por dibujo.

Ejemplo (Teorema de la envolvente)



(a) $b = 16$ **(b)** $b = 1$ **(c)** $b = \frac{4}{9}$

Ejemplo (Teorema de la envolvente)

Si $b > 1$, entonces las soluciones óptimas son las de antes $(-4,0,1)$ y $(4,0,1)$ (compruébelo). En ese caso, el teorema de la envolvente dice que $\frac{d}{db}f^*(b) = 0$, porque $\frac{\partial}{\partial b}\mathcal{L}(x^*,y^*,\lambda^*) = -\lambda^*(y^*)^2 = 0$.

Si $b = 1$, toda la restricción es una solución óptima. En este caso no se puede usar envolvente, porque el cambio de la solución hace que $x^*(b)$, $y^*(b)$ y $\lambda^*(b)$ no sean continuamente diferenciables.

Si $b < 1$, las soluciones óptimas son $\left(0, -\sqrt{\frac{16}{b}}, \frac{1}{b}\right)$ y $\left(0, \sqrt{\frac{16}{b}}, \frac{1}{b}\right)$ (compruébelo). En este caso el teorema de la envolvente dice que

$$\frac{d}{db}f^*(b) = \frac{\partial}{\partial b}\mathcal{L}(x^*,y^*,\lambda^*) = -\lambda^*(y^*)^2 = -\frac{16}{b^2}$$

Y es negativo porque si b aumenta, la elipse se acorta en y y disminuye la distancia al origen.

Ejemplo (Teorema de la envolvente)

En el caso del problema de minimización ocurre algo más simple. Independiente del valor de b, el mínimo siempre es el centro de la elipse, donde la restricción no está activa (es decir, $\lambda^* = 0$). De esta forma

$$\frac{d}{db} f^*(b) = \frac{\partial}{\partial b} \mathcal{L}(x^*, y^*, \lambda^*) = -\lambda^* (y^*)^2 = 0$$

Gráficamente tiene sentido, la distancia al centro siempre es 0, independiente del valor de b, es decir $f^*(b) = 0$ en este caso y por lo tanto la derivada es 0.

Ejercicio (Teorema de la envolvente)

Considere una versión modificada del ejercicio de la montaña, donde la forma de esta sigue la ecuación $z = 4 - ax^2 - by^2$ con $a, b > 0$ y donde la ciudad está en la región $x - 3y \leq M$, con $M \in \mathbb{R}$. Estime el cambio en la altura máxima cuando cambian a, b y M. Revise cuidadosamente los casos $M < 0$ y $M \geq 0$.

Ejercicio (Teorema de la envolvente)

Resuelva el problema del consumidor pero dejando todos los parámetros libres:

$$\begin{aligned} \max_{v,s\in\mathbb{R}^+} \quad & \ln(v)+\ln(s) \\ s.a. \quad & Nv + Cs \leq H \\ & pv + qs \leq M \end{aligned}$$

donde $N, C, p, q, H, M > 0$. Estime el cambio en la utilidad máxima cuando cambia cada parámetro, en los valores del ejemplo original. Interprete.

Ejercicio (Teorema de la envolvente)

Considere el problema general de la silla de montar

$$
\begin{aligned}
\max_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad & 4z - \phi(x^2 - y^2 - z^2) \\
\text{s.a.} \quad & xy \geq z \\
& Ax^2 + By^2 + Cz^2 \leq 3
\end{aligned}
$$

donde $A, B, C, \phi > 0$. Estime el cambio en el óptimo cuando aumenta cada parámetro, en el punto $(A, B, C, \phi) = (1, 1, 1, 1)$. Interprete.

Ejercicio (Teorema de la envolvente)

Considere los problemas de la firma (el original y el invertido) pero con la siguiente función de producción

$$F(K,L) = K^{\alpha} + \beta L$$

Resuelva ambos problemas y determine el cambio en los beneficios (para el problema original) o los costos (para el problema invertido) de la firma. Interprete para el caso original donde $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = 1$.